

## 7 Kurzzeitstabilität

Dipl.Ing.W.Briese

Das Ausgangssignal eines Oszillators wurde bisher als ein Signal einer bestimmten Frequenz angenommen. Genau genommen, besteht es aus einem komplexen Frequenzspektrum, dessen statistischer Mittelwert die Oszillatorfrequenz  $f_0$  genannt wird.

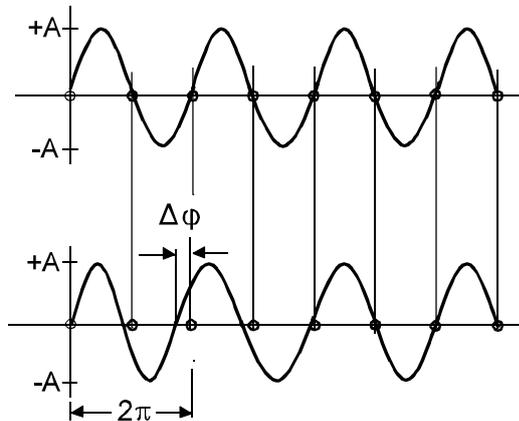


Bild 7.1 Phasenschwankungen

Mit Kurzzeitfrequenzstabilität werden diese kurzzeitigen, im Bereich von Sekundenbruchteilen bis in Minutenintervallen stattfindenden statistischen Frequenzschwankungen bezeichnet. Die Kurzzeitstabilität wird je nach Anwendungsgebiet im Zeitbereich, oder im Frequenzbereich angegeben. Im Zeitbereich werden die Schwankungen der Frequenz oder der Periodendauern in Abhängigkeit von der Meßzeit (Mittelungszeit) angegeben. Ausgedrückt wird hierbei die Kurzzeitstabilität als Allan-Varianz  $\sigma_y^2$  in Abhängigkeit von der Mittelungszeit  $\tau$ . Im Frequenzbereich wird die Kurzzeitstabilität als Phasenrauschen oder Frequenzmodulationsrauschen angegeben und zwar als:

$S_\phi(f)$  [rad<sup>2</sup>/Hz] = Spektrale Dichte des Phasenrauschens

$S_Y(f)$  [Hz<sup>-1</sup>] = Spektrale Dichte der Frequenzschwankungen

$\mathcal{L}(f)$  [dB<sub>c</sub>/Hz] = auf den Träger bezogene Einseitenband-Leistungsdichte

Bei sehr kleinem Phasenmodulationshub  $\Delta\phi$  bestehen die Beziehungen:

$$\mathcal{L}(f) = S_\phi(f)/2 \quad \text{und} \quad S_Y(f) = f^2 / f_0^2 \cdot S_\phi(f) \quad (1)$$

Mathematisch wird ein Signal mit Rauschen dargestellt durch:

$$U(t) = (U_0 + \epsilon(t)) \sin(\omega_0 t + \phi_0 + \Delta\phi(t)) \quad (2)$$

Wir betrachten hier nur den Teil der Phasen- (Frequenz) Schwankung:

$$U(t) = U \sin(\omega_0 t + \Delta \varphi(t)) \quad (3)$$

Die Form der statistischen Verteilung wird weitgehend vom Ursprung des Rauschens bestimmt. Das typische Rauschspektrum eines Quarzoszillators (Bild 7.2) kann man sich so vorstellen: aus einem gleichmäßigen Band weißen Rauschens, erhebt sich um die Oszillatorfrequenz  $f_0$  eine Anhäufung verstärkten Rauschens, das überwiegend durch die Rauscheigenschaften der Bauelemente des Oszillators bestimmt ist. Hierzu gehören das Rauschen des Oszillatorverstärkers (Schrottrauschen), genauso wie das thermische Rauschen des Rückkoppelungsnetzwerkes

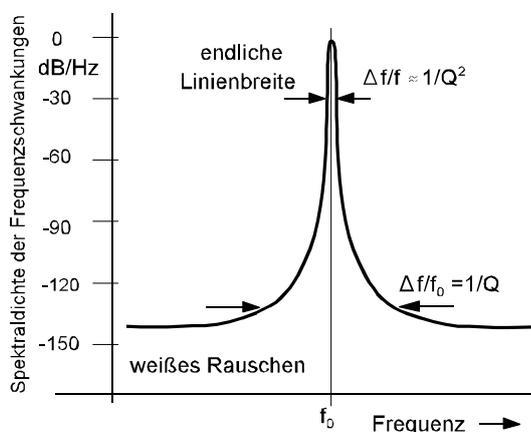


Bild 7.2 Spektrum der Ausgangsleistung eines Oszillators

einschließlich des Schwingquarzes mit seinen eigenen Rauschquellen. Die endliche Linienbreite um den Mittelwert  $f_c$  wird letztendlich durch die Bandbreite des frequenzbestimmenden Gliedes, dem Quarz bestimmt. Das Zusammenspiel zwischen den einzelnen Rauschquellen und der Schwingstufe ist sehr komplex, kann aber mit dem Leeson-Modell recht gut rechnerisch abgeschätzt werden.

### 7.1 Kurzzeitstabilität im Zeitbereich:

Als Maß für die Kurzzeitstabilität im Zeitbereich werden die Schwankungen der Frequenz in Abhängigkeit von der Meßzeit angegeben. Die Meßzeiten können im Bereich von Nanosekunden, Millisekunden oder auch mehreren Sekunden liegen. Meist wird die Kurzzeitstabilität in Form einer Tabelle oder als Diagramm in Abhängigkeit von der Meßzeit  $\tau$  angegeben (Bild 7.5). Das Maß der Kurzzeitstabilität ist die Varianz der gemessenen Frequenzschwankungen. Bei der Messung der Frequenz mit einem Frequenzzähler ist Meßzeit  $\tau$  die Samplingzeit des Zählers (abzüglich der Totzeit).

Der angezeigte Wert ist also ein Mittelwert der Frequenz über die Meßzeit  $\tau$ . Die Abweichung der Messung  $k$  vom Mittelwert  $f_0$  ist:

$$Y_k = \frac{f_k - f_0}{f_0} \quad (4)$$

Bei einer genügend großen Anzahl  $N$  Messungen kann die Varianz  $\sigma^2$  der Frequenzschwankungen angegeben werden <sup>1)</sup>:

$$\sigma^2(N, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (Y_k - Y_0)^2 \quad (5)$$

dabei ist:

$$Y_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k \quad (6)$$

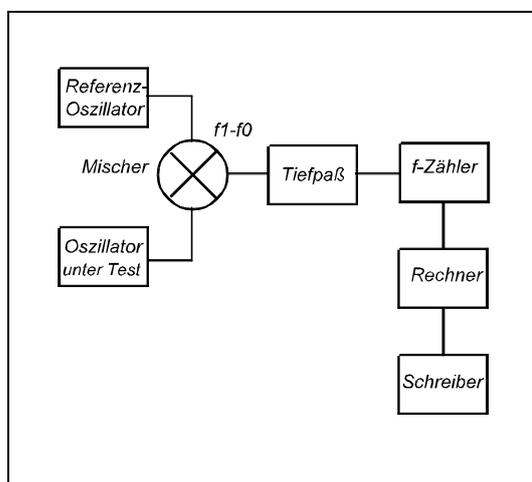


Bild 7.3 Messung der Kurzzeitstabilität im Zeitbereich, gegen eine Referenz

<sup>1</sup> Anmerkung:  
in der technischen Statistik (Qualitätskontrolle) ist der Begriff der Standardabweichung in der Form

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

bekannt.

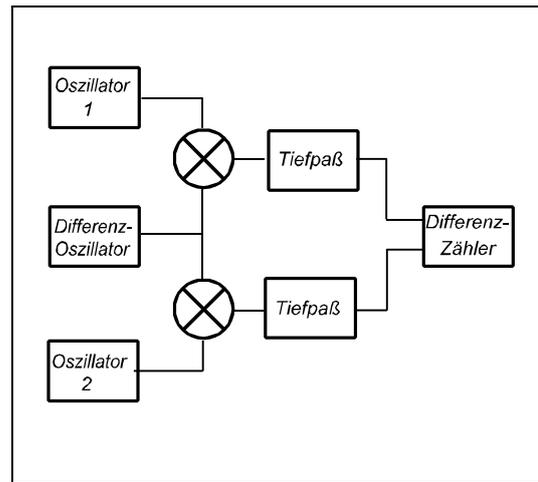


Bild 7.4 Messung der Kurzzeitstabilität  
2-Oszillatormethode

Die Meßwerte zur Ermittlung der Kurzzeitstabilität erlangt man zweckmäßig im Vergleich zu einem Referenzoszillator gleicher Frequenz  $f_0$ . Für die Auswertung ist es hierbei gleich, ob meßtechnisch die Frequenzabweichungen, die Änderung der Periodendauern, oder die Phasenschwankungen gemessen werden, die ja mathematisch fest miteinander verknüpft sind.

In der Anordnung Bild 7.3 zum Beispiel werden die Schwankungen des zu untersuchenden Oszillators 2 gegen den idealen Referenzoszillator 1 verglichen, indem sie auf einen Mischer gegeben werden. Sind die Frequenzen beider Oszillatoren bis auf die Schwankungen genau gleich, so erhalten wir am Ausgang des Mixers direkt die Schwankung  $\Delta f$  der Frequenz des Oszillators 2. Nach Durchlaufen eines Tiefpaßfilters können diese Frequenzschwankungen mit einem Zähler direkt ermittelt werden. Die Samplingzeit der Zähler ist dann die Meßzeit  $\tau$ , vorausgesetzt, daß die Totzeit zwischen den Meßzeiten vernachlässigbar klein ist ( $\leq 10\%$  der Samplingzeit).

Aus mehreren  $\Delta f$ -Messungen (N-Messungen) wird nach Gl. 5 die Varianz am besten mit einem nachgeschalteten Rechner errechnet und ausgedruckt. Ein Problem gibt es allerdings, wenn aufgrund von Langzeitfrequenzänderungen die Frequenzen der beiden Oszillatoren auseinanderdriften. Dies wird meistens der Fall sein. Deshalb wird die Standardabweichung nicht aus den auf  $Y_0$  bezogenen Messwerten, sondern aus den Mittelwerten jeweils zweier aufeinanderfolgender Messungen gebildet. Die Auswertung erfolgt dann nach der Allan-Varianz

$$\sigma_{(M,2,\tau\tau)} = \sqrt{\frac{1}{2(M-1)} \sum_{k=1}^{M-1} (Y_{k+1} - Y_k)^2} \quad (7)$$

M = Anzahl der Meßwerte

Beispiel:

Wir führen unmittelbar aufeinanderfolgend 10 Frequenzvergleichsmessungen  $Y = \Delta f/f_0 = (f_2 - f_1) / f_0$  mit einer Samplingrate  $\tau = 1$  s durch.

Meßwerte:  $(\Delta f/f) f_0$ , ( $\tau = 1$  s) Anzahl der Messungen M = 10

Y1 = $15,1 \cdot 10^{-6}$	Y2-Y1	$(Y2-Y1)^2$
Y2 = $15,4 \cdot 10^{-6}$	$0,3 \cdot 10^{-6}$	$0,09 \cdot 10^{-12}$
Y3 = $15,5 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$	$0,01 \cdot 10^{-12}$
Y4 = $15,3 \cdot 10^{-6}$	$-0,2 \cdot 10^{-6}$	$0,04 \cdot 10^{-12}$
Y5 = $15,2 \cdot 10^{-6}$	$-0,1 \cdot 10^{-6}$	$0,01 \cdot 10^{-12}$
Y6 = $14,8 \cdot 10^{-6}$	$-0,4 \cdot 10^{-6}$	$0,16 \cdot 10^{-12}$
Y7 = $14,1 \cdot 10^{-6}$	$-0,3 \cdot 10^{-6}$	$0,09 \cdot 10^{-12}$
Y8 = $14,9 \cdot 10^{-6}$	$0,4 \cdot 10^{-6}$	$0,16 \cdot 10^{-12}$
Y9 = $15,2 \cdot 10^{-6}$	$0,3 \cdot 10^{-6}$	$0,09 \cdot 10^{-12}$
Y10 = $15,4 \cdot 10^{-6}$	$0,2 \cdot 10^{-6}$	$0,04 \cdot 10^{-12}$

$$\overline{0,69 \cdot 10^{-12}} = \sum (Y_{k-1} - Y_k)^2$$

$$\sigma^2(M, 2, \tau \tau) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{k=1}^{M-1} (Y_{k+1} - Y_k)^2 = \frac{1}{2(10-1)} 0,69 \cdot 10^{-12} = 0,036 \cdot 10^{-12}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,036 \cdot 10^{-12}} \approx 0,2 \cdot 10^{-6}$$

Gleiche Auswertungen können aus mehreren Messungen mit verschiedenen Samplingzeiten durchgeführt werden. Die Auswertung führt zu einer Grafik wie in Bild 7.5 dargestellt.

Für reproduzierbare Werte sind natürlich mehr als 10 Messungen erforderlich.

## 7.2 Natur des Rauschens:

Die Natur des Rauschens ist aus der Abb. 7.5 ersichtlich.  
Im log-log-Maßstab:

$$\mu = 2 \tan \gamma \quad (8)$$

Aus der Steigung des linearen Teiles der Kurve kann auf die Art der Varianz geschlossen werden:

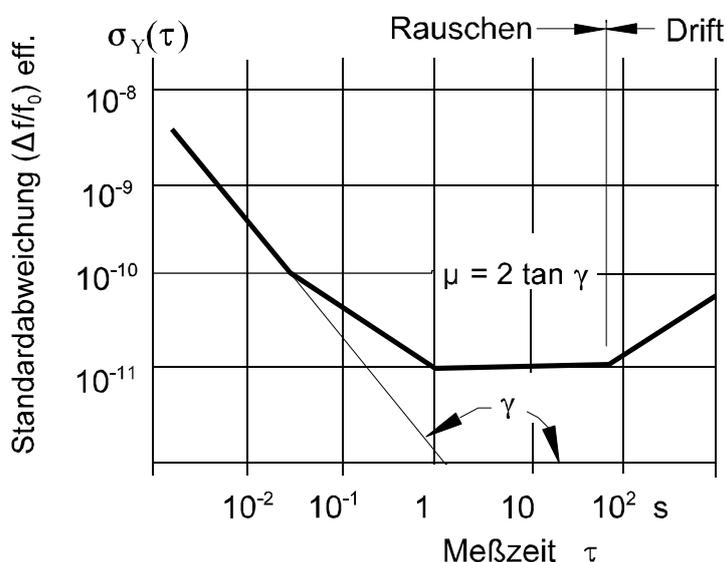


Bild 7.5 Allanvarianz

$\mu$	Natur des Rauschens
1	1/F <sup>2</sup> -Rauschen , Zufallsrauschen der Frequenz
0	1/F -Rauschen der Frequenz
-1	weißes Rauschen der Frequenz, Zufallsrauschen der Phase
-2	1/F-Rauschen der Phase
-3	weißes Rauschen der Phase

### 7.3 Kurzzeitstabilität im Frequenzbereich

Das Phasenrauschen ist ein Maß für die Kurzzeit-Frequenzstabilität eines Oszillators im Frequenzbereich. Das Phasenrauschen erzeugt ein zur mittleren Oszillatorfrequenz  $f_0$  symmetrisches Seitenbandspektrum. Wegen dieser Symmetrie genügt es, eines der beiden Seitenbänder auszuwerten.

Die Funktion  $S_\phi(f)$  beschreibt das "Phasenrauschen im Frequenzbereich". Die Spektraldichte der Phasenschwankungen  $S_\phi(f)$  hängt unmittelbar mit der Spektraldichte der Frequenzschwankungen zusammen:

$$S_\phi(f) = \left( \frac{f_0}{f} \right)^2 \cdot S_Y(f) \quad [\text{Rad}^2/\text{Hz}] \quad (9)$$

Mit  $f$  = Fourier-Frequenz oder Frequenz des Basisbandes (Seitenband-Frequenz).

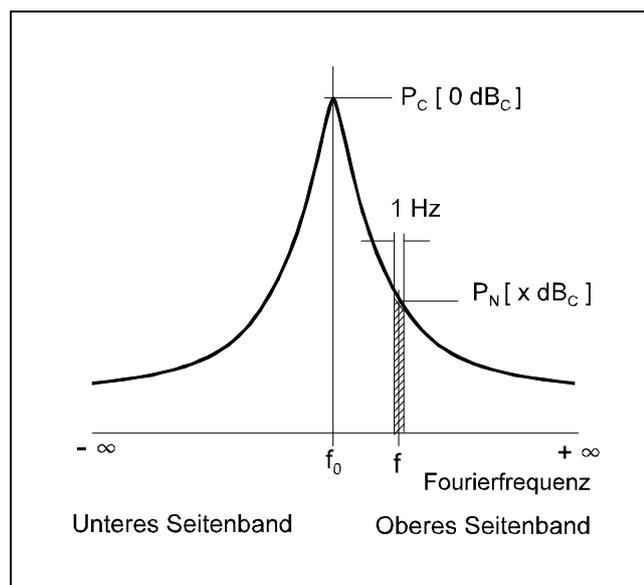


Bild 7.6 Trägerbezogene Leistungsdichte

Im Bild 7.6 ist dies verdeutlicht. Wir haben in  $f_0$  den Träger mit seinen beiden Seitenbändern, den Fourierfrequenzen von  $f_0$  bis  $f_{-\infty}$  und  $f_0$  bis  $f_{+\infty}$ . Die in  $f$  mit einer Bandbreite von 1 Hz gemessene Rauschleistung wird zu der Trägerleistung bei  $f_0$  ins Verhältnis gesetzt, das ist die trägerbezogene Leistungsdichte  $\mathcal{L}$ . Wird mit einer größeren

Bandbreite gemessen, muß die Leistungsdichte auf eine Bandbreite von 1 Hz umgerechnet werden. Das Rauschen von Signalquellen mit relativ starkem Phasenrauschen kann direkt mit einem Spektralanalysator gemessen werden. Das Verfahren hat die Nachteile, daß es Amplituden- und Phasen(Frequenz)-Rauschen nicht unterscheiden kann. Durch die ZF-Bandbreite des Analysators kann nicht in Trägernähe

gemessen werden. Bei Quarzoszillatoren ist das Phasenrauschen so gering, daß diese Methode versagt. Ein empfindlicheres Verfahren ist das Phasendetektor-Verfahren. Hierbei werden das Ausgangssignal des zu prüfenden Oszillators 1 und das eines Referenzoszillators 2 auf die Eingänge eines Quadraturmischers (mit  $90^\circ$  Phasendifferenz) gegeben

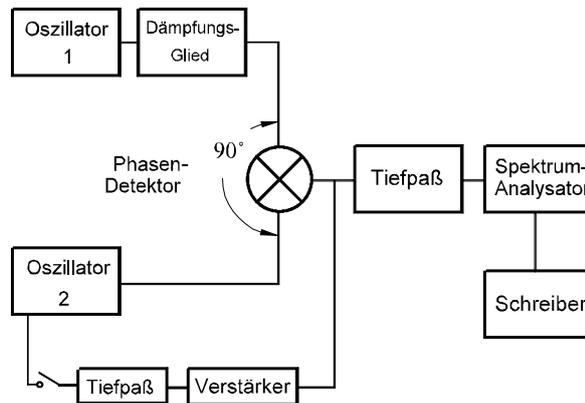


Abb.7.7 Phasenrauschen, Meßanordnung

(Bild 7.7). Die im Mischer entstehende Summenfrequenz  $2f_0$  wird mit einem Tiefpaßfilter ausgesiebt. Das Filter ist so ausgelegt, daß das zu messende Basisband im Durchlaßbereich liegt. Hinter diesem Tiefpaß haben wir die Differenzfrequenz beider Oszillatoren  $\Delta f = 0$  Hz bei Frequenzgleichheit und das kombinierte Phasenrauschen beider Oszillatoren. Unter Berücksichtigung der Kalibrierungskonstanten des Systems und der Umrechnung auf die Bandbreite 1 Hz erhalten wir am nachgeschalteten NF-Spektrumanalysator direkt die Rauschspannungen im Basisband  $S_v(f)$ . Bei der Kalibrierung des Phasendiskriminators ist darauf zu achten, daß die Ausgangsspannung beide Seitenbänder enthält, definitionsgemäß aber nur das Rauschen eines Seitenbandes zur Auswertung kommt (Abzug von 6 dB). Steht kein rauscharmer Vergleichoszillator zur Verfügung, kann ein **Oszillator Verwendung finden**, der dem zu untersuchenden Oszillator gleich ist. Mit der Annahme gleichen Rauschverhaltens ist die gemessene Rauschleistung dann  $\sqrt{2}$  größer. Bei der Auswertung sind also 3 dB abzuziehen. Um die beiden Oszillatoren während der Messung in der Quadraturbedingung ( $90^\circ$  Phasendifferenz) zu halten, wird die Frequenz (Phase) des einen Oszillators über eine Regelschleife nachgeregelt. Diese Regelschleife enthält einen Tiefpaß, der verhindert, daß zu messende Rauschanteile wegsynchronisiert werden. Die Kalibrierungskonstante  $K_\phi$  des Phasendiskriminators erhält man aus der Ausgangsspannung bei Verstimmung einer der beiden Oszillatoren. Die Kalibrierungskonstante hängt von der Diskriminatorsteilheit

ab und ist proportional der Spannung von  $f_0$ , also proportional zur Trägerleistung. Die spektrale Dichte der Phasenschwankungen ist damit:

$$S_{\phi}(f) = \frac{Sv(f)}{K_{\phi}^2} \quad (10)$$

Hieraus erhalten wir die auf den Träger bezogene Leistungsdichte des Einseitenband-Phasenrauschens  $\mathcal{L}(f)$ :

$$\mathcal{L}(f) = \frac{S_{\phi}(f)}{2} \quad (11)$$

Mit einem rechnenden Spektrumanalysator kann  $\mathcal{L}(f)$  in Abhängigkeit vom Basisband  $f$ , bezogen auf die Band breite 1 Hz, aufgezeichnet werden.

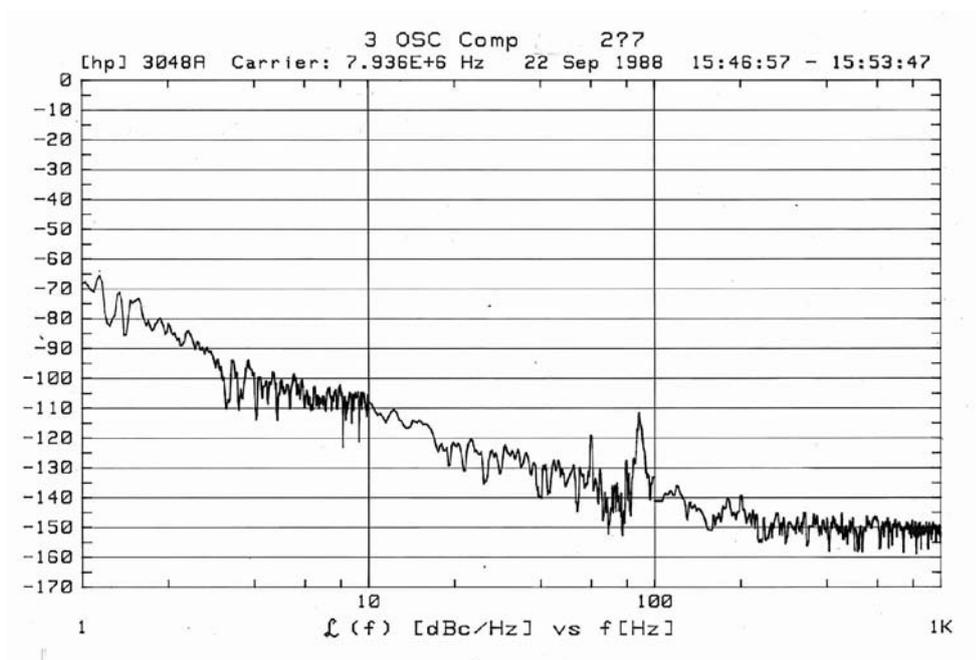


Abb. 7.8 Phasenrauschen, Beispiel einer Messung

## 7.4 Die Natur des Phasenrauschens:

Zieht man durch die gemessene Kurve mehrere Geraden und trägt diese aneinandergereiht wiederum im doppeltlogarithmischen Maßstab auf, kann man auf die Natur des Rauschens schließen (Bild 7.9).

$$S_Y(f) = \sum_{n=-2}^2 a_n \cdot f^n \quad (12)$$

$$S_\phi(f) = f_0^2 \sum_{n=-2}^2 a_n \cdot f^{n-2} \quad (13)$$

$f_0$  = Oszillatorfrequenz

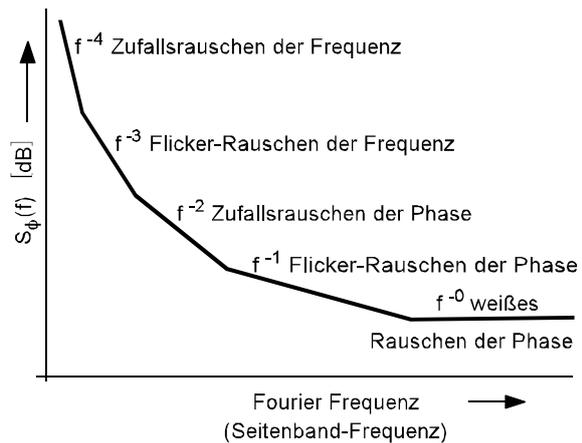


Bild 7.9 Phasenrauschen

$f^{n-2}$	n	Natur des Rauschens	$S_Y(f)$	$S_\phi(f)$
$f^{-4}$	-2	Zufallsrauschen der Frequenz	$a_{-2} \cdot f^{-2}$	$f_0^2 \cdot a_{-2} \cdot f^{-4}$
$f^{-3}$	-1	1/f-Rauschen der Frequenz	$a_{-1} \cdot f^{-1}$	$f_0^2 \cdot a_{-1} \cdot f^{-3}$
$f^{-2}$	0	weißes Rauschen der Frequenz Zufallsrauschen der Phase	$a_0$	$f_0^2 \cdot a_0 \cdot f^{-2}$
$f^{-1}$	1	1/f-Rauschen der Phase	$a_1 \cdot f$	$f_0^2 \cdot a_1 \cdot f^{-1}$
$f^0$	2	weißes Rauschen der Phase	$a_2 \cdot f^2$	$f_0^2 \cdot a_2$

## 7.5 Konvertierung vom Frequenzbereich in den Zeitbereich

Die spektrale Leistungsdichte der relativen Frequenzschwankungen  $S_Y(f)$  kann durch eine Potenzreihe beschrieben werden, die hier auf 5 Glieder beschränkt sei:

$$S_Y(f) = \sum_{n=-2}^2 a_n \cdot f^n = a_{-2} \cdot f^{-2} + a_{-1} \cdot f^{-1} + a_0 \cdot f^0 + a_1 \cdot f^1 + a_2 \cdot f^2 \quad (14)$$

$a_n$  ist der Intensitätskoeffizient.  $n$  ist die Steigung des geraden Teils der Rauschkurve im doppeltlogarithmischen Maßstab.  $n$  kennzeichnet die Natur des Rauschtyps. Die Koeffizienten  $a_n$  sind für den jeweiligen Rauschtyp charakteristisch.

Unter der Voraussetzung einer oberen Grenzfrequenz  $f_h$  ( $\omega_h = 2\pi f_h$ ) kann mit den Konvertierungsgleichungen der nachstehenden Tabelle die einzelnen Bereiche der Potenzreihe  $S_Y(f)$  konvertiert werden.

$S_Y(f) = a_n f^n$ $n =$	$S_Y(f) = \alpha \cdot \sigma_Y^2(\tau)$ $\alpha =$	$\sigma_Y^2(\tau) = \beta S_\phi(f)$ $\beta =$
2 (weißes Phasenrauschen)	$\frac{(2\pi)^2 \tau^2 f^2}{3f_h}$	$\frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2 f_0^2}$
1 Flicker(Funkel)- Rauschen der Phase	$\frac{(2\pi^2) \tau^2 f}{1,038 + 3 \ln(\omega_h \tau)}$	$\frac{[1,038 + 3 \ln(\omega_h \tau)] f}{(2\pi)^2 \tau^2 f_0^2}$
0 weißes Frequenz- Rauschen	$2\tau$	$\frac{f^2}{2\tau f_0^2}$
-1 Flicker- (Funkel)Rauschen der Frequenz	$\frac{1}{2 \ln(2) \cdot f}$	$\frac{2 \ln(2) \cdot f^3}{f_0^2}$
-2 Zufallsrauschen der Frequenz	$\frac{6}{(2\pi)^2 \tau f^2}$	$\frac{(2\pi)^2 \tau f^4}{6f_0^2}$

Die heute üblichen Standardmeßverfahren liefern als Ergebnis meist das auf die Trägerleistung bezogene Einseitenband-Phasenrauschen  $\mathcal{L}(f)$ . In Anwendungen hochstabiler Oszillatoren, z.B. Doppler-Radar oder GPS-Anwendungen ist jedoch die Angabe der Kurzzeitstabilität im Zeitbereich sinnvoller. Eine Umrechnung von  $\mathcal{L}(f)$  in  $\sigma(\tau)$  ist oft erforderlich.

Konversionstabelle  $\mathcal{L}(f) \rightleftharpoons \sigma(\tau)$

⟨10⟩

Rauschen	Steigung $\mathcal{L}(f)$	$\mathcal{L}(f) =$	$\sigma(\tau) =$	Steigung $\sigma(\tau)$
weißes Phasenrauschen	0	$\frac{[2,565 \cdot \sigma(\tau) \tau f_0]^2}{f_h} f^0$	$\frac{\sqrt{\mathcal{L}(f)} f_h}{2,565 f_0} \tau^{-1}$	-2
1/f-Rauschen der Phase	-1	$\frac{[2,565 \cdot \sigma(\tau) \tau f_0]^2}{2,184 + \ln(f_h \tau)} f^{-1}$	$\frac{\sqrt{\mathcal{L}(f)} f [2,184 + \ln(f_h \tau)]}{2,565 f_0} \tau^{-1}$	-1,9
weißes Frequenzrauschen	-2	$[\sigma(\tau) \tau^{1/2} f_0]^2 f^{-2}$	$\frac{\sqrt{\mathcal{L}(f)} f^2}{f_0} \tau^{-1/2}$	-1
1/f-Frequenzrauschen	-3	$0,361 [\sigma(\tau) f_0]^2 f^{-3}$	$1,665 \frac{\sqrt{\mathcal{L}(f)} f^3}{f_0} \tau^0$	0
Zufalls-Frequenzrauschen	-4	$[0,276 \sigma(\tau) \tau^{-1/2} f_0]^2 f^{-4}$	$3,63 \frac{\sqrt{\mathcal{L}(f)} f^4}{f_0} \tau^{1/2}$	1

## 7.6 Analyse des Phasenrauschens:

Für die Beschreibung und die Analyse des Phasenrauschens ist das Leeson'sche Modell ⟨4⟩ ⟨5⟩ nützlich, es ermöglicht eine Gesamtdarstellung der Einflußgrößen auf das Phasenrauschen.

Das Trägernahe Phasenrauschen innerhalb der (halben) Gütebandbreite, also für Fourierfrequenzen  $f \leq f_0/2 \cdot Q_B$  mit dem Verlauf von 30 dB/Dekade ( $-f^{-3}$ ) wird durch

den Quarzresonator verursacht. Das Phasenrauschen ist hier proportional zu  $1/Q^2$ , deshalb ist eine möglichst hohe Betriebsgüte  $Q_B$  im Verhältnis zur Quarzgüte  $Q$  (Leerlaufgüte des Quarzes) sehr wichtig. Der Quarz muß ggf. entsprechend optimiert oder selektiert werden.

Im Bereich außerhalb der halben Gütebandbreite wird das Phasenrauschen durch die Oszillatorschaltung bestimmt. Außerdem ist hier noch Rauschen von Spannungsreglern und das niederfrequente Abblocken der Betriebsspannung zu beachten.

Weitab wird der Rauschflur durch das thermische Grundrauschen von  $-174 \text{ dBm/1 Hz}$  bei  $25^\circ\text{C}$  begrenzt.

Bei Frequenzvervielfachung um den Faktor  $N$ , erhöht sich das Phasenrauschen um  $20 \lg N \text{ (dB)}$ .

Dieses Rauschverhalten wird im Leeson-Modell durch die Formel (Gl. 14) beschrieben.

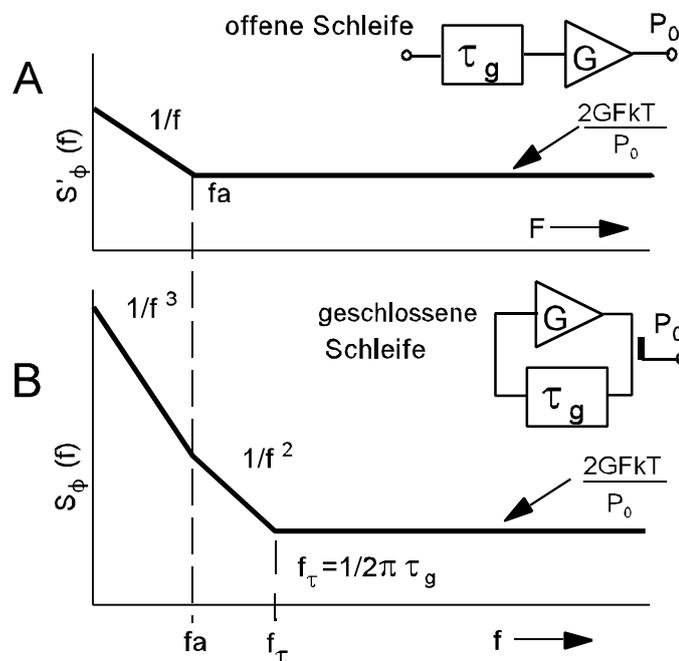


Bild 7.10 Leeson-Modell für das Phasenrauschen

Bei aufgetrennter Rückkopplungsschleife des Quarzoszillators besteht die Oszillatorschaltung aus einem Verstärker und dem Quarzresonator. Für diese Schaltung (Bild 7.10A), finden wir trägernah das  $1/f$ -Rauschen (Funktelnrauschen). Dieses  $1/f$ -Rauschen wird ab einer Frequenz  $f_\alpha$  vom weißen Rauschen verdeckt. Das weiße Rauschen hängt von der Verstärkung  $G$ , der Rauschzahl  $F$  und der Ausgangsleistung  $P_0$  des Verstärkers ab. Bei geschlossener Rückkopplungsschleife (Bild 7.10 B) wird der  $1/f$ -Bereich in ein  $1/f^3$ -Verhalten transformiert, dabei entsteht zusätzlich ein Übergangsbereich mit  $1/f^2$ -Verhalten bis zu der Frequenz der "halben Gütebandbreite"  $1/2Q_B = f_\tau$ . Außerhalb der Frequenz  $f_\tau$  bleibt das weiße Rauschen.

Dieses Gesamtverhalten der Phasenfluktuation  $S_\phi(f)$  läßt sich mit der Leeson-Formel

beschreiben:

$$S_{\phi}(f) = \left[ \alpha_R f_0^4 + \left( \frac{f_0}{2Q_{eff}} \right)^2 \alpha_E \right] / f^3 + \left[ 2\alpha_R Q_{eff} f_0^3 + 2 \frac{GFkT}{P_0} \left( \frac{f_0}{2Q_{eff}} \right)^2 \right] / f^2 + \alpha_E / f + 2 \frac{GFkT}{P_0} \quad (15)$$

mit:

$\alpha_R$  = Funkelrauschkonstante des Quarzes ( $\approx 2 \cdot 10^{-39}$  rad<sup>2</sup>/Hz<sup>2</sup>)

$\alpha_E$  = Funkelrauschkonstante des Verstärkers ( $\approx 6 \cdot 10^{-14}$  rad<sup>2</sup>)

kT = Boltzmannkonstante · Temperatur [K]

F = Rauschfaktor

Der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer bestimmt das trägernähe Rauschen (-30 dB/Dekade). Es setzt sich zusammen aus den Beiträgen des Resonators  $\alpha_R \cdot f_0^4$  und dem des Verstärkers. Die zweite eckige Klammer beschreibt das Rauschen im Übergangsbereich (-20 dB/Dekade), ebenfalls unterteilt in Resonator- und Verstärkerbeitrag. Der Ausdruck  $\alpha_E / f$  steht für das 1/f-Funkelrauschen. Der letzte frequenzunabhängige Term ist das weiße Verstärkerrauschen. Auch wenn nicht alle Größen in der Leeson-Formel bekannt sind, ist diese Formel doch geeignet, mit Näherungswerten die Einflüsse der einzelnen Parameter abzuschätzen. Im Bild 7.12 ist das Phasenrauschen nach Leeson mit den untenstehenden Werten als Beispiel gerechnet und dargestellt.

Frequenz	$f_0 = 10$ MHz	
Betriebsgüte	$Q_{eff} = 100\,000$	--- = 1 000 000
Verstärkung (begrenzt)	$G = 5,62$ (15 dB)	
Rauschzahl	$F = 1,26$ (2 dB)	* * = 1 dB
Ausgangsleistung	$P_0 = 5$ mW	--- = 20 mW
Quarzrauschen	$\alpha_R = 2 \cdot 10^{-39}$	--- = $2 \cdot 10^{-38}$
Verstärkerrauschen	$\alpha_E = 6 \cdot 10^{-14}$	

Die Betriebsgüte  $Q_L$  oder effektive Güte  $Q_{eff}$  ist die durch die Reihenschaltung mit dem Oszillatorkreis gedämpfte Quarzgüte  $Q$ .

$$Q_{eff} = \frac{1}{\omega C_1 R_{eff}} \quad (16)$$

$$R_{eff} = R_r + R_e + R_a$$

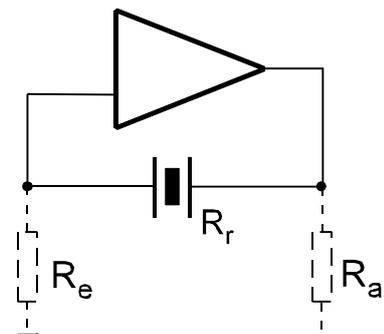


Bild 7.11 Dämpfung der Güte Q

In Reihe mit der Lastkapazität liegende Widerstände oder parallele Dämpfungswiderstände sind sinngemäß umzurechnen.

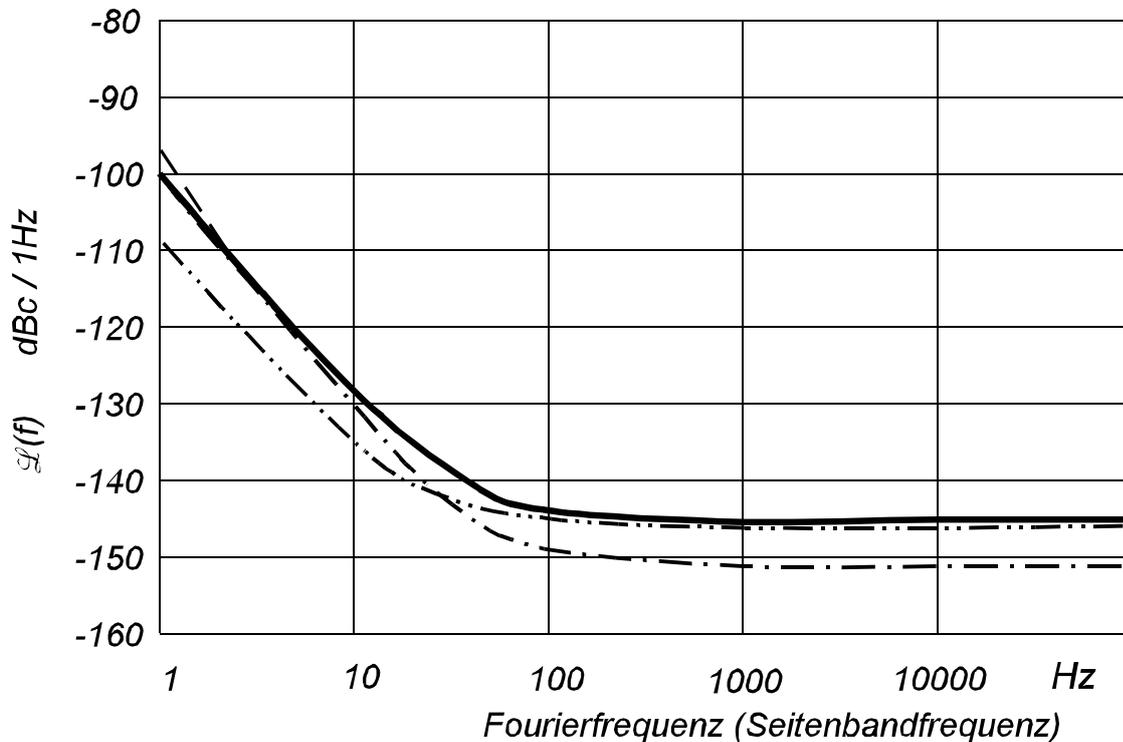


Bild 7.12 Einseitenbandrauschen  $\mathcal{L}(f)$ , Rechenbeispiel nach dem Leeson-Modell

## 7.7 Konstruktionshinweise:

Für Oszillatoren mit geringem Phasenrauschen sollte die Quarzbelastung relativ hoch sein. Dies steht im Widerspruch zu einer guten Langzeitkonstanz. Ein guter Kompromiß liegt meist bei einer Quarzbelastung von etwa 100 bis 500  $\mu\text{W}$ .

Für den Quarzoszillator sollten Transistoren mit hoher Gleichstromverstärkung  $h_{FE}$  und niedrigem Basiswiderstand  $r_{bb}$ , mit nicht zu hoher Transitfrequenz verwendet werden. Weil das Phasenrauschen im Frequenzabstand von wenigen Hz bis einigen kHz um den Träger liegt, ist der niederfrequente Bereich des Transistorrauschens wesentlich. Rauscharme Niederfrequenztransistoren mit ausreichend hoher Transitfrequenz ( $\geq 5 \cdot f_0$ ) sind deshalb geeigneter als HF-Transistoren. Bei bipolaren Transistoren wird das Rauschen wesentlich von der Basis-Emitterstrecke bestimmt.

PNP-Transistoren rauschen im allgemeinen weniger als NPN-Transistoren. MOSFET's rauschen sehr stark, wobei bei tieferen Frequenzen das  $1/f$ -Rauschen dominiert. Sperrschicht-FET's rauschen im Vergleich zu bipolaren- und MOSFET-Transistoren am wenigsten. GaAs-FET's sind bei hohen Betriebsfrequenzen rauscharm, rauschen jedoch sehr stark im Niederfrequenzbereich.

Einfache Oszillatorstufen haben im Allgemeinen zwei Funktionen:

Erstens, die Funktion des Verstärkens, um die Schwingungen anzuregen und die Rückkopplungsbedingungen aufrecht zu erhalten.

Zweitens, die Begrenzung der Maximalamplitude durch abnehmende Verstärkung bei großer Amplitude (Sättigung).

Durch die Begrenzerfunktion ändern sich die Arbeitspunkte des Transistors und gegebenenfalls anderer amplitudenabhängiger Bauteile im Rückkopplungsweig. Durch die nichtlineare Begrenzung ändert sich während des Amplitudenverlaufs ständig die Phasenlage gegenüber der reinen Sinusschwingung und durch die entstandenen Nichtlinearitäten der Impedanzen wird durch multiplikative Mischung (Modulation) ein Seitenbandrauschen verursacht. Zur Vermeidung der Begrenzungsverzerrungen müssen die beiden Funktionen Oszillatorverstärker und Amplitudenbegrenzung getrennt werden (Fremdbegrenzung). Weiterhin sollten die aktiven Stufen eine starke HF-Gegenkopplung haben, um einen großen linearen Dynamikbereich sicherzustellen. Es ist darauf zu achten, daß die HF-Amplitude im Oszillatorbereich nicht den linearen Bereich der beteiligten Bauelemente überschreitet.

Durch die Einkoppelung des Schwingquarzes in die Oszillatorschaltung wird die Schwingungsgüte  $Q$  auf den Wert der effektiven Güte  $Q_{\text{eff}}$  gedämpft (Bild 7.11) (GL. 15) Quarze mit einem höheren Resonanzwiderstand lassen sich meist besser in die Schaltung anpassen. Mit der Forderung nach einer großen Güte, ergibt sich hieraus eine kleine dynamische Kapazität  $C_1$ , die im Allgemeinen mit Obertonquarzen erreicht wird.

## 7.8 Verwendete Begriffe:

Symbol	Einheit	Beschreibung
$f_0$	Hz	Trägerfrequenz
$f$	Hz	Fourierfrequenz, Seitenbandfrequenz
$K_\phi$	V/rad	Konstante des Phasendiskriminators
$S_\phi(f)$	rad <sup>2</sup> /Hz	Spektrale Dichte der Phasenschwankungen
$S_Y(f)$	1/Hz	Spektrale Dichte der relativen Frequenzschwankungen, auf ein Seitenband bezogen
$\mathcal{L}(f)$	dB/Hz	Einseitenband-Phasenrauschen, auf die Trägerleistung bezogen
		$\mathcal{L} = \frac{\text{ESB Rauschleistung(Phase)}}{\text{Signalleistung}}$
$Y$	$\Delta f/f_0$	gemessen über das Intervall $\tau$
$Y_0$		Mittelwert der relativen Frequenzschwankungen aus allen Messungen
$Y_k$		k-te Messung von $Y$
$\Delta f/f_0$		relative Frequenzdifferenz zwischen zwei Oszillatoren
$N, M$		Anzahl der Messungen
$k$	J/K	Boltzmann-Konstante $1,38 \cdot 10^{-23}$
$B$	Hz	Bandbreite
$Q_{\text{eff}}$	1	effektive Schwingungsgüte (Quarz)
$\sigma_Y^2(\tau)$		Allan-Varianz
$\tau$	s	Samplingzeit = Meßzeit = Mittelungszeit
$\gamma$		Steigungswinkel der Allan-Varianz im doppeltlog. Maßstab
$\mu$		Konstante für die Natur der Allanvarianz
$n$		Konstante für die Natur des Frequenzrauschens
$\epsilon(t)$	V/s	Rauschen der Amplitude
$F$		Rauschzahl

## 7.9 Literaturhinweise:

- ⟨1⟩ DIN 45174 Teil 1, Beiblatt: Quarzoszillatoren: Begriffe, Erläuterungen (1985)
- ⟨2⟩ IEC Publications 679-1 (1980): Quartz Crystal Controlled Oscillators, Part I  
General Information, Test Conditions and Methods.
- ⟨3⟩ Wainwright, A.E. + Walls + Mc. Caa, W.D.  
Direct Measurements of the Inherent Frequency Stability of  
Quartz Crystal Resonators.  
Proc. 26th ASFC (1975), 177
- ⟨4⟩ Leeson, D.B.                      A Simple Model of Feedback Oscillator Noise Spectrum  
Proc. IEEE Vol.54, No.2 (1966), S.329f.
- ⟨5⟩ Parker, T.E.:                      Characteristics and sources of phase noise in stable  
oszillators  
Proc. 41st ASFC (1987) S. 99 ff.
- ⟨6⟩ Hewlett Packard  
Phasenrausch-Meßtechnik im HF- und Mikrowellenbereich  
Firmendruckschrift Nr. 0987-0264 (1987)
- ⟨7⟩ Bernd Neubig, DK1AG  
Extrem rauscharmer 96 MHz Quarzoszillator für die UHF/SHF-  
Frequenzaufbereitung, Teil I: Bedeutung von Kurzzeitstabilität und  
Phasenrauschen für die Sender- und Empfänger-Aufbereitung.  
Vortrag UKW-Tagung in Weinheim, UKW-Berichte H1, (1981)
- ⟨8⟩ Dieter Scherer  
Entwicklungs-Prinzipien und Prüfmethode für HF- und Mikro-  
wellengeneratoren mit niedrigem Phasenrauschen.  
nachrichten elektronik 35 (1981) Heft 8 und Heft 9.
- ⟨9⟩ Curtis, G.S.    The Relationship between Resonator and Oscillator Noise,  
and Resonator Noise Measurement Techniques.  
41st AFCS (1987)
- ⟨10⟩ Dieter Scherer  
Design Principles and Test Methods for Low Phase Noise RF  
and Microwave Sources.  
HP-Firmenschrift,  
RF & Microwave Measurement Symposium and Exhibition  
October, 1978